

Kripke Game の紹介

佐藤雄太

数学基礎論若手の会 2026

神戸大学大学院 システム情報学研究科 情報数理研究室

はじめに

Jij Inc. の近藤亮介さんとの共同研究です.

スライドは Web 上でも閲覧できます.

cannorin.net/math/wakate2026.pdf

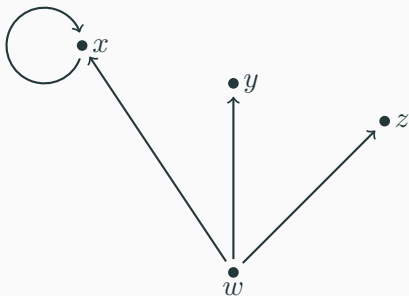


Kripke 意味論の復習

Kripke フレーム

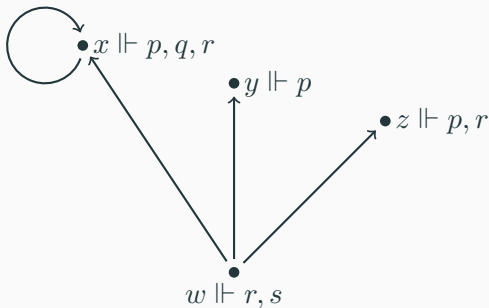
可能世界: 非空の集合

到達可能関係: ある世界から別の世界が“見える”かどうか
(ただし, 自分自身が“見える”とは必ずしも限らない)



到達可能関係は R で表す. この例では xRx, wRx, wRy, wRz

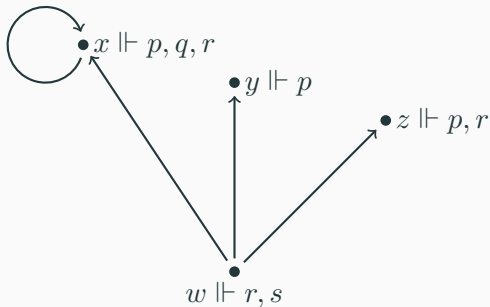
各世界にそれぞれ真理値割り当てを定める $\Rightarrow$ Kripke モデル



R によって真なる命題変数が単調増加する必要は特にない

□ と ◇ の真理値

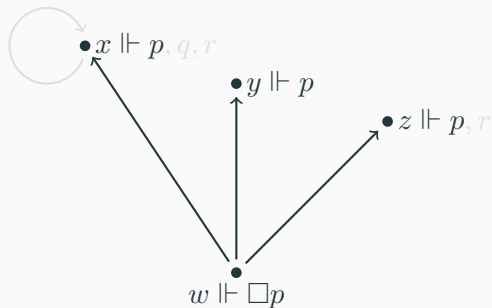
- 見えている任意の可能世界で φ が真 $\Rightarrow \Box\varphi$ が真
- φ が真の可能世界が一個以上見える $\Rightarrow \Diamond\varphi$ が真



例として, $w \Vdash \Box p$ で $w \Vdash \Diamond q$ だが $w \nVdash \Box r$ で $w \nVdash \Diamond s$

□ と ◇ の真理値

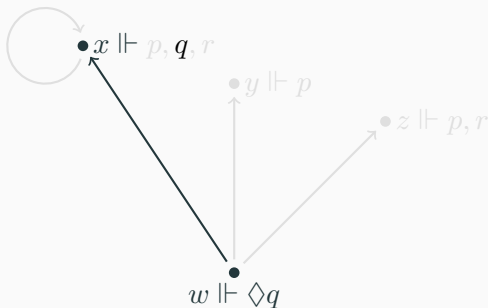
- 見えている任意の可能世界で φ が真 $\Rightarrow \Box\varphi$ が真
- φ が真の可能世界が一個以上見える $\Rightarrow \Diamond\varphi$ が真



例として, $w \Vdash \Box p$ で $w \Vdash \Diamond q$ だが $w \nVdash \Box r$ で $w \nVdash \Diamond s$

□ と ◇ の真理値

- 見えている任意の可能世界で φ が真 $\Rightarrow \Box\varphi$ が真
- φ が真の可能世界が一個以上見える $\Rightarrow \Diamond\varphi$ が真



例として, $w \Vdash \Box p$ で $w \Vdash \Diamond q$ だが $w \nVdash \Box r$ で $w \nVdash \Diamond s$

どのような真理値割り当てであっても常に真になる ➡ 恒真



- $x \models p$ とする. x から見える可能世界では全て p が真なので $x \models \Box p$. 特に $x \models p \rightarrow \Box p$
- $x \not\models p$ とする. 自明に $x \models p \rightarrow \Box p$

➡ $p \rightarrow \Box p$ は x 上で恒真

定義 (1/2)

ここまでの話をまともな定義にする:

Definition

- PropVar を命題変数全体とする
- $\mathcal{L}_{\Box\Diamond} = \text{PropVar} \cup \{\perp, \wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \Box, \Diamond\}$ とする

Definition

$W \neq \emptyset$, $R \subseteq W \times W$, $V : \text{PropVar} \rightarrow \mathcal{P}(W)$ とする

- 組 $\mathcal{F} = (W, R)$ を Kripke フレーム と呼ぶ
- 組 $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, V)$ を ($\mathcal{F}$ に基づく) Kripke モデル と呼ぶ

定義 (2/2)

Definition (真理値)

モデル $\mathcal{M} = (W, R, V)$ について $\Vdash_{\mathcal{M}} \subseteq W \times \mathcal{L}_{\Box\Diamond}$ を定める:

- $x \Vdash_{\mathcal{M}} \Box\varphi :\iff \forall y (xRy \Rightarrow y \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi)$
- $x \Vdash_{\mathcal{M}} \Diamond\varphi :\iff \exists y (xRy \ \& \ y \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi)$
- $x \Vdash_{\mathcal{M}} p :\iff x \in V(p)$ (他は古典命題論理と同様)

Definition (恒真)

フレーム $\mathcal{F} = (W, R)$, $x \in W$, $\varphi \in \mathcal{L}_{\Box\Diamond}$ について,

- $(\mathcal{F}, x) \models \varphi :\iff \mathcal{F}$ に基づく任意のモデル $\mathcal{M}$ で $x \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi$
- $\mathcal{F} \models \varphi :\iff$ 任意の $x \in W$ で $(\mathcal{F}, x) \models \varphi$

$(\mathcal{F}, x) \models \varphi \Rightarrow x$ 周辺の到達可能関係が、特定の構造を持つ

- $(\mathcal{F}, x) \models p \rightarrow \Box p : xRy \Rightarrow x = y$ (x は高々自分しか見えない)
- $(\mathcal{F}, x) \models \Box \perp : \neg(xRy)$ (x からは何も見えない)
- $(\mathcal{F}, x) \models \Box p \rightarrow p : xRx$ (x は反射的)
- $(\mathcal{F}, x) \models \Box p \rightarrow \Box \Box p : xRyRz \Rightarrow xRz$ (x を起点に推移的)
- $(\mathcal{F}, x) \models p \rightarrow \Box \Diamond p : xRy \Rightarrow yRx$ (x を起点に対称的)
- ...

$\mathcal{F} \models \varphi \Rightarrow \mathcal{F}$ 全体が特定の構造を持つ

- $\mathcal{F} \models \Box p \rightarrow p : R$ は反射的
- ...

Kripke Game について

Wordle というゲームがある *

- 親は 5 文字の英単語 X を思い浮かべて、秘密にする
- 子は 6 手を与えられ、各手で 5 文字の英単語 Y を提示する:
 - もし X と Y が一致していたら子の勝利
 - 一致していない場合、親は Y の各文字について、その文字が X に含まれるか、そして位置が合っているかを答える
- 子が 6 手全て使い切った上で勝利できなければ、親の勝利

*公開後 The New York Times に買収されたが、最近になってアップを始めたようでパロディサイト『ポケモン Wordle』が閉鎖されたりしている

パクリゲーを作ろう！ (1/2)

Kripke 意味論を使って似たようなゲームを考えたい

➡ 論理式 $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ で質問して、フレームの形状を推測する

各 φ_i が恒真となる可能世界自体が分かると簡単すぎるので...

Definition (恒真性濃度)

$\mathcal{F} = (W, R)$ と $\varphi \in \mathcal{L}_{\Box\Diamond}$ に対して:

$$\text{VC}(\mathcal{F}, \varphi) := |\{x \in W \mid (\mathcal{F}, x) \models \varphi\}|$$

すなわち $\text{VC}(\mathcal{F}, \varphi)$ は φ が恒真となる W の部分集合の濃度

特に有限フレームなら $\mathcal{F} \models \varphi \iff \text{VC}(\mathcal{F}, \varphi) = |W|$

パクリゲーを作ろう！ (2/2)

Definition (Kripke Game)

$0 < n, k < \omega$ とし, 弱い Kripke Game $wKG(n, k)$ を定める:

- 親は濃度 n のフレーム $\mathcal{F}$ を選び, 秘密にする
- 子は k 手を与えられ, 次のいずれかの行動ができる:
 - 論理式 φ を提示する. 親は $VC(\mathcal{F}, \varphi)$ を答える
 - フレーム $\mathcal{F}'$ を提示する. もし $\mathcal{F}$ と $\mathcal{F}'$ が等しい, もしくはグラフ同型であれば, 子の勝利
- 子が k 手全て使い切った上で勝利できなければ, 親の勝利

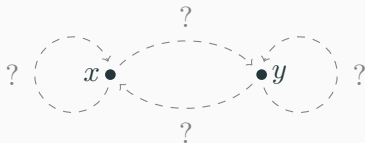
子が一回しかフレームを提示できない変種を 強い Kripke Game $KG(n, k)$ とする[†]

[†] “弱い” = Kripke フレームでの総当たりを許す, “強い” = 許さない

例題

簡単のため $KG(2, 4)$ でやってみよう

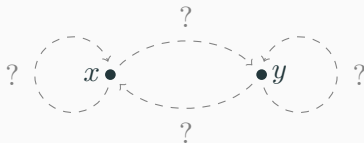
$\mathcal{F} = (W, R)$, $W = \{x, y\}$, $R = ???$ (秘密) とする



例題

簡単のため $KG(2, 4)$ でやってみよう

$\mathcal{F} = (W, R)$, $W = \{x, y\}$, $R = ???$ (秘密) とする



- $VC(\Box\perp) = 0 \Rightarrow x$ も y も何かしらは見える

例題

簡単のため $KG(2, 4)$ でやってみよう

$\mathcal{F} = (W, R)$, $W = \{x, y\}$, $R = ???$ (秘密) とする



- $VC(\Box \perp) = 0 \Rightarrow x$ も y も何かしらは見える
- $VC(p \rightarrow \Box p) = 1 \Rightarrow$ 自分しか見えないものがある (y とする)

例題

簡単のため $KG(2, 4)$ でやってみよう

$\mathcal{F} = (W, R)$, $W = \{x, y\}$, $R = ???$ (秘密) とする



- $VC(\Box \perp) = 0 \Rightarrow x$ も y も何かしらは見える
- $VC(p \rightarrow \Box p) = 1 \Rightarrow$ 自分しか見えないものがある (y とする)
- $VC(\Box p \rightarrow p) = 1 \Rightarrow x$ は非反射的

例題

簡単のため $KG(2, 4)$ でやってみよう

$\mathcal{F} = (W, R)$, $W = \{x, y\}$, $R = ???$ (秘密) とする



- $VC(\Box \perp) = 0 \Rightarrow x$ も y も何かしらは見える
- $VC(p \rightarrow \Box p) = 1 \Rightarrow$ 自分しか見えないものがある (y とする)
- $VC(\Box p \rightarrow p) = 1 \Rightarrow x$ は非反射的
- このフレームを解答して勝利

例題 (弱いバージョン)

もしこれが $wKG(2, 4)$ だったなら...



- $VC(\Box \perp) = 0 \Rightarrow x$ も y も何かしらは見える
- $VC(p \rightarrow \Box p) = 1 \Rightarrow$ 自分しか見えないものがある (y とする)

この段階で、フレームの候補が残り 2 通りしかない

例題 (弱いバージョン)

もしこれが $wKG(2, 4)$ だったなら...



- $VC(\Box \perp) = 0 \Rightarrow x$ も y も何かしらは見える
- $VC(p \rightarrow \Box p) = 1 \Rightarrow$ 自分しか見えないものがある (y とする)

この段階で、フレームの候補が残り 2 通りしかない

⇒ 残り 2 手で総当たりして勝利

必勝戦略はあるのか？ (1/2)

子側の必勝戦略の有無を考えたい．簡単にわかることとして：

- 十分でかい k に対して $wKG(n, k)$ は必勝
 - 濃度 n のフレームの isomorphism class は有限なので
- $KG(n, 1)$ や $wKG(n, 1)$ は必勝ではない
 - $n = 1$ でさえ 50% の運ゲー（自分が見える or 見えない）

Problem

各 n に対して，

- $wKG(n, k)$ が必勝になるような最小の k は何？
- $KG(n, k)$ が必勝になるような k は存在するか？

必勝戦略はあるのか？ (2/2)

今得られている結果は以下の通り:

Theorem (K. and S.)

- (a) $n \leq 3$ のとき, $\text{KG}(n, k)$ はあまりデカくない k で必勝
- (b) $n \geq 4$ のとき, $\text{KG}(n, k)$ は k によらず必勝ではない
- (c) $\text{wKG}(n, k(n))$ が必勝となる最小の $k(n)$ は n に対して少なくとも指数的に増加する

(b) の理解が他 2 つの理解に大事なので, そこから解説する

必勝戦略の有無

Theorem (再掲)

$n \geq 4$ のとき, $\text{KG}(n, k)$ は k によらず必勝ではない

具体的には, 以下のこと[‡]を示す:

Lemma (目標)

$n \geq 4$ のとき, 以下を満たす濃度 n の $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ が存在する:

- 任意の φ で $\text{VC}(\mathcal{F}, \varphi) = \text{VC}(\mathcal{G}, \varphi)$
- $\mathcal{F}$ と $\mathcal{G}$ がグラフ同型ではない

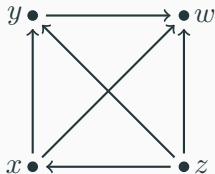
これを Kripke 意味論の言葉を使ってさらに変形していく

[‡]論理式を何回質問してもこういう奴らが残るので無理ですよ, ということ

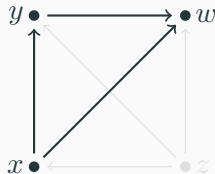
生成部分フレーム (1/2)

Definition

$\mathcal{F} = (W, R)$, $x \in W$ とし, $x\uparrow := \{y \in W \mid \exists m \, xR^m y\}$ とする §.
 W と R をそれぞれ $x\uparrow$ に制限して得られるフレーム
 $\mathcal{F}_x := (x\uparrow, R \upharpoonright x\uparrow)$ を, x による 生成部分フレーム とよぶ



$\mathcal{F}$



$\mathcal{F}_x$

§ただし $xR^0 y :\Leftrightarrow x = y$ で $xR^{k+1} y :\Leftrightarrow \exists w (xRw \ \& \ wR^k y)$

生成部分フレーム (2/2)

Proposition

$$(\mathcal{F}, x) \models \varphi \iff (\mathcal{F}_x, x) \models \varphi$$

Proof.

真理値の定義より, x での φ の真偽は x とその先にある可能世界にのみ依存して決まる □

生成部分フレームは根付きなので扱いやすい！

$VC(\mathcal{F}, \varphi)$ を計算したければ, $\mathcal{F}$ の各世界による生成部分フレームたちを集めてきて, それらの根で φ の恒真性を調べればよい

標準フレームと type , deck (1/3)

根付きフレームの，同型を除いて一意な表現を定めておく

Definition

- フレーム (n, R) が 0 を根とするとき 標準フレーム という (ただし $n > 0$ で $n = \{0, 1, \dots, n-1\}$)
- 標準フレーム全体に適当に整列順序 $\leq_{\text{SF}}$ を入れておく
- 任意の有限根付きフレーム $\mathcal{F}$ について，根を保つ同型な標準フレーム全体の $\leq_{\text{SF}}$ -最小元を $\text{type}(\mathcal{F})$ とする[¶]

Proposition

根付きフレーム $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ が根を保つ同型 $\Leftrightarrow \text{type}(\mathcal{F}) = \text{type}(\mathcal{G})$

[¶]濃度 n のフレームは極論言えば $n \times \mathcal{P}(n \times n)$ なのでそう見るだけ

標準フレームと type , deck (2/3)

特に生成部分フレームについて、以下も言える:

Proposition

$$(\mathcal{F}_x, x) \models \varphi \iff (\text{type}(\mathcal{F}_x), 0) \models \varphi$$

type を使えば、「フレームの各世界による生成部分フレームたちを集めてきたもの」の一意な表現も得られる

Definition

$\mathcal{F} = (W, R)$ に対して多重集合 $\text{Deck}(\mathcal{F})$ を以下で定める $\mathbb{I}$:

$$\text{Deck}(\mathcal{F}) := \{\text{type}(\mathcal{F}_x) \mid x \in W\}$$

$\mathbb{I}$ 多重集合にするのは、異なる可能世界の生成部分フレームでも同じ type になることがあるため

標準フレームと type, deck (3/3)

これらを使えば，恒真性濃度を以下のように書き直せる：

Proposition

$$\text{VC}(\mathcal{F}, \varphi) = |\{\mathcal{S} \in \text{Deck}(\mathcal{F}) \mid (\mathcal{S}, 0) \models \varphi\}|$$

Proof.

$$\begin{aligned}\text{VC}(\mathcal{F}, \varphi) &= |\{x \in W \mid (\mathcal{F}, x) \models \varphi\}| \\ &= |\{x \in W \mid (\mathcal{F}_x, x) \models \varphi\}| \\ &= |\{x \in W \mid (\text{type}(\mathcal{F}_x), 0) \models \varphi\}| \\ &= |\{\mathcal{S} \in \text{Deck}(\mathcal{F}) \mid (\mathcal{S}, 0) \models \varphi\}| \quad \square\end{aligned}$$

Corollary

$$\text{Deck}(\mathcal{F}) = \text{Deck}(\mathcal{G}) \implies \forall \varphi \ (\text{VC}(\mathcal{F}, \varphi) = \text{VC}(\mathcal{G}, \varphi))$$

標準フレームを表す論理式 (1/4)

Corollary (再掲)

$$\text{Deck}(\mathcal{F}) = \text{Deck}(\mathcal{G}) \implies \forall \varphi \ (\text{VC}(\mathcal{F}, \varphi) = \text{VC}(\mathcal{G}, \varphi))$$

これの逆方向も示して，全体的に deck の話に帰着させたい

すなわち $\text{Deck}(\mathcal{F}) \neq \text{Deck}(\mathcal{G})$ のとき， $\text{VC}(\mathcal{F}, \varphi) \neq \text{VC}(\mathcal{G}, \varphi)$ となる φ を具体的に与えることを考える

$\text{Deck}(\mathcal{F}) \neq \text{Deck}(\mathcal{G})$ ならば左右で出現回数が異なる type があるので，それをうまく論理式で識別したい

標準フレームを表す論理式 (2/4)

標準フレームの根 0 からフレーム全体の構造を制御したい

根付きなので、濃度の数だけ $\Box$ をネストしてしまえばすべての可能世界に論理式の恒真性を強制できる

Definition

$k \geq 0$ に対して、 $\Box^k \varphi := \varphi \wedge \Box \varphi \wedge \cdots \wedge \Box^k \varphi$ とする

Proposition

標準フレーム $\mathcal{S} = (m, R)$ について以下は同値:

- 何らかの $k \geq m$ で $(\mathcal{S}, 0) \models \Box^{k-1} \varphi$
- 任意の $0 \leq i < m$ で $(\mathcal{S}, i) \models \varphi$

標準フレームを表す論理式 (3/4)

Definition

標準フレーム $S = (m, R)$ と $m \leq k < \omega$ に対して、論理式 $\beta(S, k)$ を以下の論理式の連言として定める:

1. p_0
2. $\Box^{k-1}(p_i \rightarrow \neg p_j)$, for all $i, j < m$ with $i \neq j$
3. $\Box^{k-1} \bigvee_{0 \leq i < m} p_i$
4. $\Box^{k-1}(p_i \rightarrow \Diamond p_j)$, for all $i, j < m$ with $i R j$
5. $\Box^{k-1}(p_i \rightarrow \neg \Diamond p_j)$, for all $i, j < m$ with $\neg(i R j)$

気持ち: 「 S と同型 $\Leftrightarrow \beta(S, k)$ が根で充足可能」になってほしい.
各可能世界 i に命題変数 p_i を割り当て (1, 2, 3),
 S の到達可能関係 R の様子を $\Diamond$ でうまく表現する (4, 5)

標準フレームを表す論理式 (4/4)

Theorem (K. and S.)

$m \leq k$, $\mathcal{T}$ を濃度 m の標準フレーム, $\mathcal{S}$ を濃度 k の標準フレームとすると, $(\mathcal{T}, 0) \not\models \neg\beta(\mathcal{S}, k) \iff \mathcal{T} \text{ と } \mathcal{S} \text{ が根を保つ同型}^{**}$

Corollary

$$\text{Deck}(\mathcal{F}) \neq \text{Deck}(\mathcal{G}) \implies \exists \varphi, (\text{VC}(\mathcal{F}, \varphi) \neq \text{VC}(\mathcal{G}, \varphi))$$

Proof.

$\text{Deck}(\mathcal{F})$ と $\text{Deck}(\mathcal{G})$ の非共通要素から, 一番でかい濃度 k を持つもの $\mathcal{S}$ を持ってくると, $\beta(\mathcal{S}, k)$ を根で充足可能な type の数に差が出てくる □

^{**} $(\mathcal{T}, 0) \not\models \neg\beta(\mathcal{S}, k)$ は “ $\beta(\mathcal{S}, k)$ が $\mathcal{T}$ の根で充足可能” と読むとよい

Corollary

$$\text{Deck}(\mathcal{F}) = \text{Deck}(\mathcal{G}) \iff \forall \varphi (\text{VC}(\mathcal{F}, \varphi) = \text{VC}(\mathcal{G}, \varphi))$$

Lemma (目標, 再掲)

$n \geq 4$ のとき, 以下を満たす濃度 n の $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ が存在する:

- $\forall \varphi (\text{VC}(\mathcal{F}, \varphi) = \text{VC}(\mathcal{G}, \varphi))$
- $\mathcal{F}$ と $\mathcal{G}$ がグラフ同型ではない

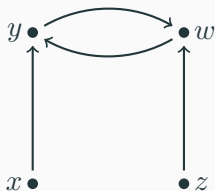
➡ deck が等しいのにグラフ同型ではない ような $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ の存在を示せばよい! (純粋にグラフ理論的な問題に帰着できた)

$KG(n, k)$ の $n = 4$ での反例

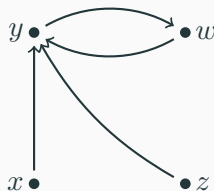
$KG(4, k)$ が必勝ではないことを示すために、deck が等しいのにグラフ同型ではないようなフレームの組の存在を実際に示そう

$KG(n, k)$ の $n = 4$ での反例

$KG(4, k)$ が必勝ではないことを示すために, deck が等しいのにグラフ同型ではないようなフレームの組の存在を実際示そう



$\mathcal{F}$

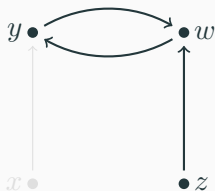


$\mathcal{G}$

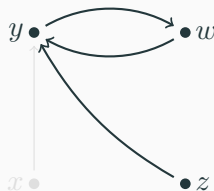
各可能世界からの生成部分フレームの type が左右で完全一致

$KG(n, k)$ の $n = 4$ での反例

$KG(4, k)$ が必勝ではないことを示すために, deck が等しいのにグラフ同型ではないようなフレームの組の存在を実際示そう



$\mathcal{F}_z$



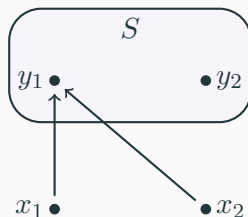
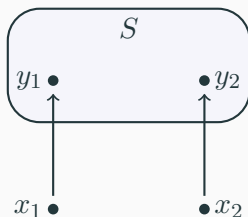
$\mathcal{G}_z$

各可能世界からの生成部分フレームの type が左右で完全一致

KG(n, k) のより一般的な反例

次のような状態のときに deck が等しくかつ同型でなくなる:

- 対称性が高い部分グラフ S がある
- S の内部に、生成部分フレームが等しい y_1, y_2 がある
- S の外側から y_1, y_2 のいずれかを見る x_1, x_2 がある



➡ まさに $n \geq 4$ のときのみ構成できる！

KG(n, k) の必勝戦略の有無

- deck が等しくかつ同型でない フレームの組が作れるとき、
KG(n, k) は必勝ではなくなる
 - 論理式ではそのようなフレームたちを区別できないため
- $n \geq 4$ では必ずそのような組を作れるので、必勝ではない
- $n \leq 3$ ではそのような組を作れず、実際に論理式を使って
どんなフレームの組も区別できる
 - 例えば KG(2, 4) は必勝で、例題で用いた 3 論理式で十分
 - 計算を回した結果 KG(3, k) も $5 \leq k \leq 7$ あたりで必勝となる

wKG(n, k) の必勝戦略の有無 (1/2)

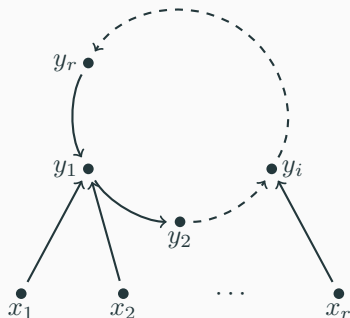
論理式だけでは deck が等しく同型でないフレームたちを区別できず、候補がある程度残ってしまう

➡ それらを総当たりで全て潰すのに十分な手数を与えれば、wKG(n, k) を必勝にできる

➡ 「deck が等しく同型でないフレームたち」が n によってどれくらい増加するかを調べたい

wKG(n, k) の必勝戦略の有無 (2/2)

簡単のため $n = 2r$ とする．次のようなフレームを考える：



外側の r 点が，長さ r のサイクル上の 1 点をそれぞれ選ぶ．
同じ deck を持つ非同型なフレームが $\Theta\left(2^n/n^{\frac{3}{2}}\right)$ 通り作れる

➡ n の exponential 回の総当たりが要求される！

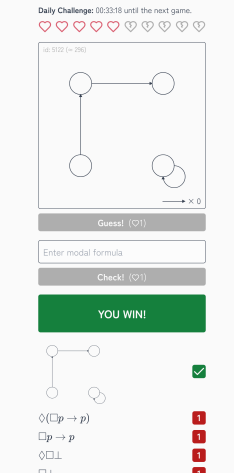
Theorem (K. and S.)

- (a) $n \leq 3$ のとき, $\text{KG}(n, k)$ はあまりデカくない k で必勝
- (b) $n \geq 4$ のとき, $\text{KG}(n, k)$ は k によらず必勝ではない
- (c) $\text{wKG}(n, k(n))$ が必勝となる最小の $k(n)$ は n に対して少なくとも指数的に増加する

Proof.

- (b) は deck が等しく同型でないフレームの組を構成できてしまうことによる. (a) はそのようなフレームの組を作れないことによる.
- (c) はそのようなフレームが指数的に増加することによる □

遊んでみてね



wKG(4, 10) を遊べます！

追加で $|R|$ （辺の数）も開示して易しくし、
必勝である $\S$ ことも示されております

cannorin.net/kripke



$\S$ https://x.com/Kory__3/status/2031241318220140796

指導教員の倉橋太志先生が様相論理の教科書を出されます:

『様相論理入門—形式的証明とクリプキモデルで学ぶ論理体系— (仮)』

共立出版 2027 年 3 月刊行予定

指導教員の倉橋太志先生が様相論理の教科書を出されます:

『様相論理入門—形式的証明とクリプキモデルで学ぶ論理体系— (仮)』

共立出版 2027 年 3 月刊行予定

Kripke Game の攻略本としてもオススメです