Kripke Game について

佐藤雄太

第 61 回 MLG 数理論理学研究集会 (神戸大学, 2026/10/25)

神戸大学大学院 システム情報学研究科 情報数理研究室

はじめに

Jij Inc. の近藤亮介さんとの共同研究です.

スライドは Web 上でも閲覧できます.

cannorin.net/math/mlg61.pdf

Kripke 意味論 (1/2)

Definition

- $\mathrm{PropVar}$ を命題変数全体とする
- $\mathscr{L}_{\Box\Diamond} = \mathrm{PropVar} \cup \{\bot, \wedge, \vee, \neg \rightarrow, \Box, \Diamond\}$ とする

Definition

$W \neq \emptyset$, $R \subseteq W \times W$, $V : \mathrm{PropVar} \rightarrow \mathcal{P}(W)$ とする

- 組 $\mathcal{F} = (W, R)$ を Kripke フレーム と呼ぶ
- 組 $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, V)$ を （$\mathcal{F}$ に基づく）Kripke モデルと呼ぶ

Kripke 意味論 (2/2)

Definition (真理値)

モデル $\mathcal{M} = (W, R, V)$ について $\Vdash_{\mathcal{M}} \subseteq W \times \mathscr{L}_{\Box\Diamond}$ を定める:

- $x \Vdash_{\mathcal{M}} \Box\varphi \ :\Longleftrightarrow\ \forall y\,(xRy \Rightarrow y \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi)$
- $x \Vdash_{\mathcal{M}} \Diamond\varphi \ :\Longleftrightarrow\ \exists y\,(xRy \mathbin{\&} y \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi)$
- $x \Vdash_{\mathcal{M}} p \ :\Longleftrightarrow\ x \in V(p)$　（他は古典命題論理と同様）

Definition (恒真)

フレーム $\mathcal{F} = (W, R)$, $x \in W$, $\varphi \in \mathscr{L}_{\Box\Diamond}$ について，

- $(\mathcal{F}, x) \vDash \varphi \ :\Longleftrightarrow\ \mathcal{F}$ に基づく任意のモデル $\mathcal{M}$ で $x \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi$
- $\mathcal{F} \vDash \varphi \ :\Longleftrightarrow$ 任意の $x \in W$ で $(\mathcal{F}, x) \vDash \varphi$

恒真性とフレームの構造

$(\mathcal{F}, x) \vDash \varphi$ ➡ x 周辺の到達可能関係が，特定の構造を持つ

- $(\mathcal{F}, x) \vDash p \to \Box p : xRy \Rightarrow x = y$ （x は高々自分しか見えない）
- $(\mathcal{F}, x) \vDash \Box\bot : \neg(xRy)$ （x からは何も見えない）
- $(\mathcal{F}, x) \vDash \Box p \to p : xRx$ （x は反射的）
- $(\mathcal{F}, x) \vDash \Box p \to \Box\Box p : xRyRz \Rightarrow xRz$ （x を起点に推移的）
- $(\mathcal{F}, x) \vDash p \to \Box\Diamond p : xRy \Rightarrow yRx$ （x を起点に対称的）
- ...

$\mathcal{F} \vDash \varphi$ ➡ $\mathcal{F}$ 全体が特定の構造を持つ

- $\mathcal{F} \vDash \Box p \to p : R$ は反射的
- ...

同型と p-morphism

Definition

$\mathcal{F}_1 = (W_1, R_1)$, $\mathcal{F}_2 = (W_2, R_2)$, $f : W_1 \to W_2$ について:

- f が以下の条件を満たすとき morphism とよぶ:

$$\forall x, y \in W_1 \, (x \, R_1 \, y \Rightarrow f(x) \, R_2 \, f(y))$$

- f がさらに以下の条件を満たすとき p-morphism とよぶ:

$$\forall x \in W_1 \, \forall y' \in W_2 \, (f(x) \, R_2 \, y' \Rightarrow \exists y \in W_1 \, (x \, R_1 \, y \mathbin{\&} f(y) = y'))$$

Fact

$\mathcal{F}_1$ から $\mathcal{F}_2$ への全単射 morphism f が存在して，f^{-1} も morphism $\iff$ $\mathcal{F}_1$ と $\mathcal{F}_2$ がグラフ同型

根付きフレーム

Definition

フレーム $\mathcal{F} = (W, R)$ について:

- $x \in W$ について $x{\uparrow} := \{y \in W \mid \exists m\, xR^m y\}$ とする *
- ある $x \in W$ で $W = x{\uparrow}$ のとき $\mathcal{F}$ は 根付き であるといい，その x を $\mathcal{F}$ の 根 とよぶ

Definition

- 根付きフレーム間の morphism $f : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$ が $\mathcal{F}_1$ の根を $\mathcal{F}_2$ の根に移すとき，f は 根を保つ という
- 根を保つ全単射 morphism f, f^{-1} によるグラフ同型を 根を保つ同型 という

*ただし $xR^0y :\Leftrightarrow x = y$ で $xR^{k+1}y :\Leftrightarrow \exists w\,(xRw \;\&\; wR^k y)$

Kripke Game について

元ネタ

Wordle というゲームがある[†]

- 親は 5 文字の英単語 X を思い浮かべて，秘密にする
- 子は 6 手を与えられ，各手で 5 文字の英単語 Y を提示する:
  - もし X と Y が一致していたら子の勝利
  - 一致していない場合，親は Y の各文字について，その文字が X に含まれるか，そして位置が合っているかを答える
- 子が 6 手全て使い切った上で勝利できなければ，親の勝利

[†]公開後 The New York Times に買収されたが，最近になってアップを始めたようでパロディサイト『ポケモン Wordle』が閉鎖されたりしている

パクリゲーを作ろう！ (1/2)

Kripke 意味論を使って似たようなゲームを考えたい

➡ 論理式 $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ で質問して，フレームの形状を推測する

各 φ_i が恒真となる可能世界自体が分かると簡単すぎるので...

Definition (恒真性濃度)

$\mathcal{F} = (W, R)$ と $\varphi \in \mathscr{L}_{\Box\Diamond}$ に対して:

$$\mathrm{VC}(\mathcal{F}, \varphi) \coloneqq |\{x \in W \mid (\mathcal{F}, x) \vDash \varphi\}|$$

すなわち $\mathrm{VC}(\mathcal{F}, \varphi)$ は φ が恒真となる W の部分集合の濃度

特に有限フレームなら $\mathcal{F} \vDash \varphi \iff \mathrm{VC}(\mathcal{F}, \varphi) = |W|$

パクリゲーを作ろう！ (2/2)

Definition (Kripke Game)

$0 < n, k < \omega$ とし，弱い Kripke Game $\mathrm{wKG}(n, k)$ を定める:

- 親は濃度 n のフレーム $\mathcal{F}$ を選び，秘密にする
- 子は k 手を与えられ，次のいずれかの行動ができる:
  - 論理式 φ を提示する．親は $\mathrm{VC}(\mathcal{F}, \varphi)$ を答える
  - フレーム $\mathcal{F}'$ を提示する．もし $\mathcal{F}$ と $\mathcal{F}'$ が等しい，もしくはグラフ同型であれば，子の勝利
- 子が k 手全て使い切った上で勝利できなければ，親の勝利

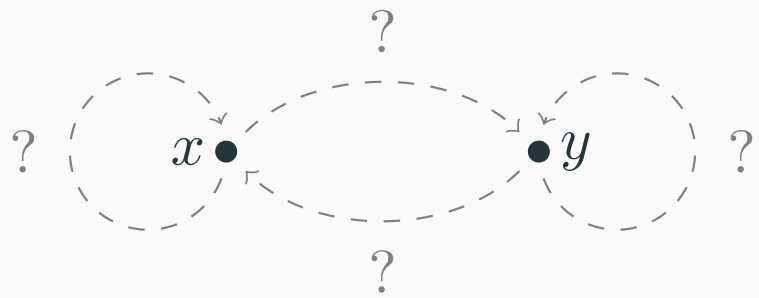
子が一回しかフレームを提示できない変種を 強い Kripke Game $\mathrm{KG}(n, k)$ とする [‡]

[‡] “弱い” $=$ Kripke フレームでの総当たりを許す，“強い” $=$ 許さない

例題

簡単のため $\mathrm{KG}(2,4)$ でやってみよう

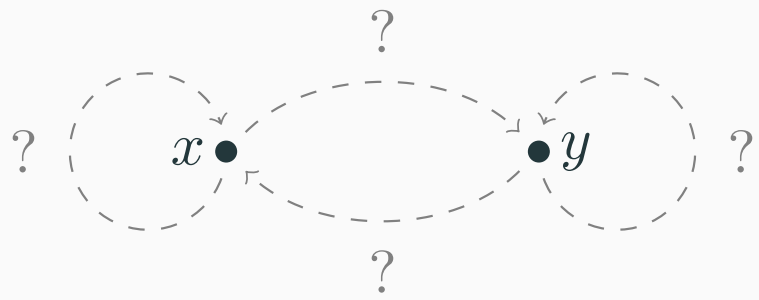
$\mathcal{F} = (W, R)$, $W = \{x, y\}$, $R = ???$ （秘密）とする



例題

簡単のため $\mathrm{KG}(2,4)$ でやってみよう

$\mathcal{F} = (W, R)$, $W = \{x, y\}$, $R = ???$ （秘密）とする



- $\mathrm{VC}(\Box\bot) = 0$ ➡ x も y も何かしらは見える

例題

簡単のため $\mathrm{KG}(2,4)$ でやってみよう

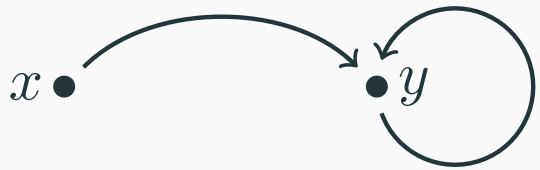
$\mathcal{F} = (W, R)$, $W = \{x, y\}$, $R = ???$ （秘密）とする

- $\mathrm{VC}(\Box\bot) = 0$ ➡ x も y も何かしらは見える
- $\mathrm{VC}(p \to \Box p) = 1$ ➡ 自分しか見えないものがある（y とする）

例題

簡単のため $\mathrm{KG}(2,4)$ でやってみよう

$\mathcal{F} = (W, R)$, $W = \{x, y\}$, $R = ???$ （秘密）とする

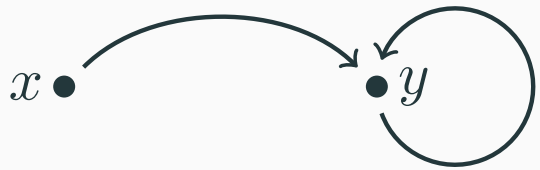


- $\mathrm{VC}(\Box\bot) = 0$ ➡ x も y も何かしらは見える
- $\mathrm{VC}(p \to \Box p) = 1$ ➡ 自分しか見えないものがある（y とする）
- $\mathrm{VC}(\Box p \to p) = 1$ ➡ x は非反射的

例題

簡単のため $\mathrm{KG}(2,4)$ でやってみよう

$\mathcal{F} = (W, R)$, $W = \{x, y\}$, $R = ???$ （秘密）とする



- $\mathrm{VC}(\Box\bot) = 0$ ➡ x も y も何かしらは見える
- $\mathrm{VC}(p \to \Box p) = 1$ ➡ 自分しか見えないものがある（y とする）
- $\mathrm{VC}(\Box p \to p) = 1$ ➡ x は非反射的
- このフレームを解答して勝利

例題（弱いバージョン）

もしこれが $\mathrm{wKG}(2,4)$ だったなら...

- $\mathrm{VC}(\Box\bot) = 0$ ➡ x も y も何かしらは見える
- $\mathrm{VC}(p \to \Box p) = 1$ ➡ 自分しか見えないものがある（y とする）

この段階で，フレームの候補が残り 2 通りしかない

例題（弱いバージョン）

もしこれが $\mathrm{wKG}(2,4)$ だったなら...

- $\mathrm{VC}(\Box\bot) = 0$ ➡ x も y も何かしらは見える
- $\mathrm{VC}(p \to \Box p) = 1$ ➡ 自分しか見えないものがある（y とする）

この段階で，フレームの候補が残り 2 通りしかない
➡ 残り 2 手で総当たりして勝利

必勝戦略はあるのか？ (1/2)

子側の必勝戦略の有無を考えたい．簡単にわかることとして:

- 十分でかい k に対して $\mathrm{wKG}(n,k)$ は必勝
  - 濃度 n のフレームの isomorphism class は有限 [3]
- $\mathrm{KG}(n,1)$ や $\mathrm{wKG}(n,1)$ は必勝ではない
  - $n=1$ でさえ 50% の運ゲー（自分が見える or 見えない）

Problem

各 n に対して，

- $\mathrm{wKG}(n,k)$ が必勝になるような最小の k は何？
- $\mathrm{KG}(n,k)$ が必勝になるような k は存在するか？

必勝戦略はあるのか？ (2/2)

今得られている結果は以下の通り:

Theorem (K. and S.)

(a) $n \leq 3$ のとき，$\mathrm{KG}(n,k)$ はあまりデカくない k で必勝

(b) $n \geq 4$ のとき，$\mathrm{KG}(n,k)$ は k によらず必勝ではない

(c) $\mathrm{wKG}(n,k)$ が必勝となる最小の k は n に対して
少なくとも指数的に増加する

(b) の理解が他 2 つの理解に大事なので，そこから解説する

必勝戦略の有無

証明方針

Theorem (再掲)

$n \geq 4$ のとき，$\mathrm{KG}(n, k)$ は k によらず必勝ではない

具体的には，以下のこと[§] を示す:

Lemma (目標)

$n \geq 4$ のとき，以下を満たす濃度 n の $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ が存在する:

- 任意の φ で $\mathrm{VC}(\mathcal{F}, \varphi) = \mathrm{VC}(\mathcal{G}, \varphi)$
- $\mathcal{F}$ と $\mathcal{G}$ がグラフ同型ではない

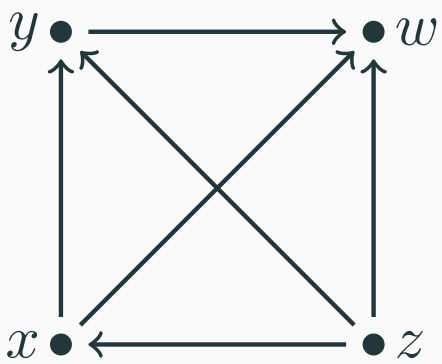
これを Kripke 意味論の言葉を使ってさらに変形していく

[§]論理式を何回質問してもこういう奴らが残るので無理ですよ，ということ

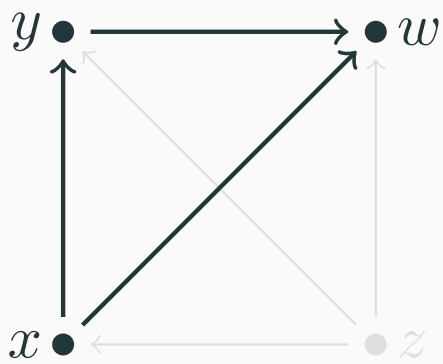
生成部分フレーム (1/2)

Definition

$\mathcal{F} = (W, R)$, $x \in W$ とする．W と R をそれぞれ $x{\uparrow}$ に制限して得られるフレーム $\mathcal{F}_x \coloneqq (x{\uparrow}, R \restriction x{\uparrow})$ を，x による
生成部分フレーム とよぶ．いま $\mathcal{F}_x$ は自明に根付きである



$\mathcal{F}$



$\mathcal{F}_x$

生成部分フレーム (2/2)

Proposition

$$(\mathcal{F}, x) \vDash \varphi \iff (\mathcal{F}_x, x) \vDash \varphi$$

Proof.

真理値の定義より，x での φ の真偽は x とその先にある可能世界にのみ依存して決まる $\square$

$\mathrm{VC}(\mathcal{F}, \varphi)$ を計算したければ，$\mathcal{F}$ の各世界による生成部分フレームたちを集めてきて，それらの根で φ の恒真性を調べればよい

標準フレームと type, deck (1/3)

根付きフレームの，同型を除いて一意な表現を定めておく

Definition

- フレーム (n, R) が 0 を根とするとき 標準フレーム という（ただし $n > 0$ で $n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$）
- 標準フレーム全体に適当に整列順序 $\leq_{\mathrm{SF}}$ を入れておく
- 任意の有限根付きフレーム $\mathcal{F}$ について，根を保つ同型な標準フレーム全体の $\leq_{\mathrm{SF}}$-最小元を $\mathrm{type}(\mathcal{F})$ とする ¶

Proposition

根付きフレーム $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ が根を保つ同型 $\Leftrightarrow \mathrm{type}(\mathcal{F}) = \mathrm{type}(\mathcal{G})$

¶濃度 n のフレームは極論言えば $n \times \mathcal{P}(n \times n)$ なのでそう見てるだけ

標準フレームと type, deck (2/3)

特に生成部分フレームについて，以下も言える:

Proposition

$$(\mathcal{F}_x, x) \vDash \varphi \iff (\mathrm{type}(\mathcal{F}_x), 0) \vDash \varphi$$

type を使えば，「フレームの各世界による生成部分フレームたちを集めてきたもの」の一意な表現も得られる

Definition

$\mathcal{F} = (W, R)$ に対して多重集合 $\mathrm{Deck}(\mathcal{F})$ を以下で定める[‖]:

$$\mathrm{Deck}(\mathcal{F}) := \{\!\!\{\mathrm{type}(\mathcal{F}_x) \mid x \in W\}\!\!\}$$

[‖]多重集合にするのは，異なる可能世界の生成部分フレームでも同じ type になることがあるため

標準フレームと type, deck (3/3)

これらを使えば，恒真性濃度を以下のように書き直せる:

Proposition

$$\mathrm{VC}(\mathcal{F}, \varphi) = |\{\!\{\mathcal{S} \in \mathrm{Deck}(\mathcal{F}) \mid (\mathcal{S}, 0) \vDash \varphi\}\!\}|$$

Proof.

$$\begin{aligned}
\mathrm{VC}(\mathcal{F}, \varphi) &= |\{x \in W \mid (\mathcal{F}, x) \vDash \varphi\}| \\
&= |\{x \in W \mid (\mathcal{F}_x, x) \vDash \varphi\}| \\
&= |\{x \in W \mid (\mathrm{type}(\mathcal{F}_x), 0) \vDash \varphi\}| \\
&= |\{\!\{\mathcal{S} \in \mathrm{Deck}(\mathcal{F}) \mid (\mathcal{S}, 0) \vDash \varphi\}\!\}|
\end{aligned}$$

□

Corollary

$$\mathrm{Deck}(\mathcal{F}) = \mathrm{Deck}(\mathcal{G}) \implies \forall \varphi \, (\mathrm{VC}(\mathcal{F}, \varphi) = \mathrm{VC}(\mathcal{G}, \varphi))$$

標準フレームを表す論理式 (1/4)

Corollary (再掲)

$$\mathrm{Deck}(\mathcal{F}) = \mathrm{Deck}(\mathcal{G}) \implies \forall \varphi\ (\mathrm{VC}(\mathcal{F}, \varphi) = \mathrm{VC}(\mathcal{G}, \varphi))$$

これの逆方向も示して，全体的に deck の話に帰着させたい

すなわち $\mathrm{Deck}(\mathcal{F}) \neq \mathrm{Deck}(\mathcal{G})$ のとき，$\mathrm{VC}(\mathcal{F}, \varphi) \neq \mathrm{VC}(\mathcal{G}, \varphi)$ となる φ を具体的に与えることを考える

$\mathrm{Deck}(\mathcal{F}) \neq \mathrm{Deck}(\mathcal{G})$ ならば左右で出現回数が異なる type があるので，それをうまく論理式で識別したい

標準フレームを表す論理式 (2/4)

標準フレームの根 0 からフレーム全体の構造を制御したい

根付きなので，濃度の数だけ $\Box$ をネストしてしまえばすべての可能世界に論理式の恒真性を強制できる

Definition

$k \geq 0$ に対して，$\boxdot^k \varphi := \varphi \wedge \Box\varphi \wedge \cdots \wedge \Box^k\varphi$ とする

Proposition

標準フレーム $\mathcal{S} = (m, R)$ について以下は同値:

- 何らかの $k \geq m$ で $(\mathcal{S}, 0) \vDash \boxdot^{k-1}\varphi$
- 任意の $0 \leq i < m$ で $(\mathcal{S}, i) \vDash \varphi$

標準フレームを表す論理式 (3/4)

Definition

標準フレーム $\mathcal{S} = (m, R)$ と $m \leq k < \omega$ に対して，論理式 $\beta(\mathcal{S}, k)$ を以下の論理式の連言として定める:

1. p_0
2. $\boxdot^{k-1}(p_i \to \neg p_j)$, for all $i, j < m$ with $i \neq j$
3. $\boxdot^{k-1} \bigvee_{0 \leq i < m} p_i$
4. $\boxdot^{k-1}(p_i \to \Diamond p_j)$, for all $i, j < m$ with iRj
5. $\boxdot^{k-1}(p_i \to \neg\Diamond p_j)$, for all $i, j < m$ with $\neg(iRj)$

いわゆる subframe logic の分析に使われる論理式

Fine [1], Wolter [4], Miyazaki and Kowalski [2] など...

標準フレームを表す論理式 (4/4)

Theorem

$m \leq k$，$\mathcal{T}$ を濃度 m の標準フレーム，$\mathcal{S}$ を濃度 k の標準フレームとすると，$(\mathcal{T}, 0) \not\models \neg\beta(\mathcal{S}, k) \iff \mathcal{T}$ と $\mathcal{S}$ が根を保つ同型

Proof.

$m < k$ のとき $\mathcal{T}$ と $\mathcal{S}$ は自明に同型でなく，一方鳩の巣原理を使って $(\mathcal{T}, 0) \models \neg\beta(\mathcal{S}, k)$ が示せる．

$m = k$ のとき，まず一般に $(\mathcal{T}, 0) \not\models \neg\beta(\mathcal{S}, k)$ が

「$\mathcal{T}$ から $\mathcal{S}$ への，根を保つ全射 p-morphism が存在する」

と同値であることが示せる．いま，濃度が等しい有限フレーム間の全射 p-morphism は同型写像でしかありえない □

グラフ理論的特徴づけ (1/2)

Corollary

$$\mathrm{Deck}(\mathcal{F}) \neq \mathrm{Deck}(\mathcal{G}) \implies \exists \varphi \ (\mathrm{VC}(\mathcal{F}, \varphi) \neq \mathrm{VC}(\mathcal{G}, \varphi))$$

Proof.

$\mathrm{Deck}(\mathcal{F})$ と $\mathrm{Deck}(\mathcal{G})$ の非共通要素から，一番でかい濃度 k を持つもの $\mathcal{S}$ を持ってくると，$\beta(\mathcal{S}, k)$ を根で充足可能な type の数に差が出てくる $\square$

Corollary

$$\mathrm{Deck}(\mathcal{F}) = \mathrm{Deck}(\mathcal{G}) \iff \forall \varphi \ (\mathrm{VC}(\mathcal{F}, \varphi) = \mathrm{VC}(\mathcal{G}, \varphi))$$

グラフ理論的特徴づけ (2/2)

Lemma (目標，再掲)

$n \geq 4$ のとき，以下を満たす濃度 n の $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ が存在する:

- $\forall \varphi \ (\mathrm{VC}(\mathcal{F}, \varphi) = \mathrm{VC}(\mathcal{G}, \varphi))$
- $\mathcal{F}$ と $\mathcal{G}$ がグラフ同型ではない

グラフ理論的特徴づけ (2/2)

Lemma (目標，再掲)

$n \geq 4$ のとき，以下を満たす濃度 n の $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ が存在する:

- $\mathrm{Deck}(\mathcal{F}) = \mathrm{Deck}(\mathcal{G})$
- $\mathcal{F}$ と $\mathcal{G}$ がグラフ同型ではない

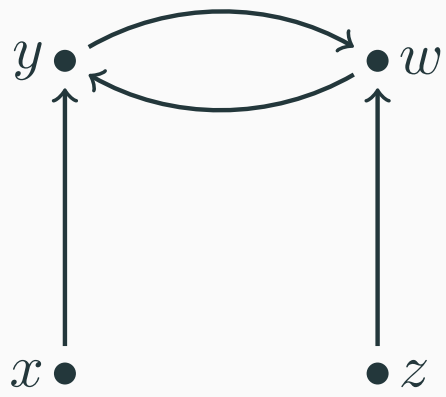
➡ deck が等しいのにグラフ同型ではない ような $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ の存在を示せばよい！　（純粋にグラフ理論的な問題に帰着できた）

$\mathrm{KG}(n,k)$ の $n=4$ での反例

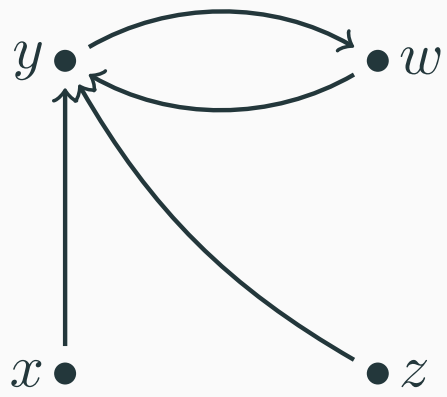
$\mathrm{KG}(4,k)$ が必勝ではないことを示すために，deck が等しいのにグラフ同型ではないようなフレームの組の存在を実際に示そう

$\mathrm{KG}(n,k)$ の $n=4$ での反例

$\mathrm{KG}(4,k)$ が必勝ではないことを示すために，deck が等しいのにグラフ同型ではないようなフレームの組の存在を実際に示そう



$\mathcal{F}$

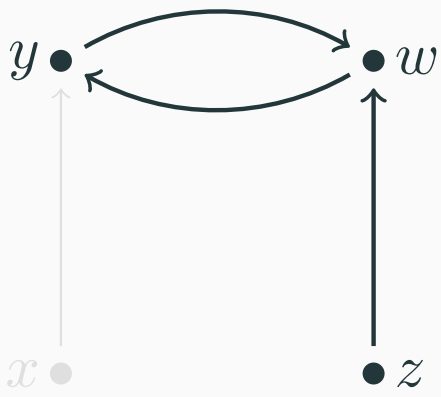


$\mathcal{G}$

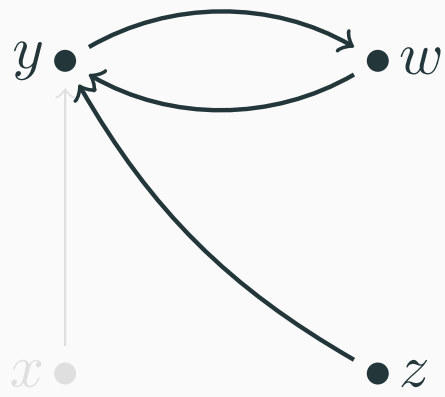
各可能世界からの生成部分フレームの type が左右で完全一致

$\mathrm{KG}(n,k)$ の $n=4$ での反例

$\mathrm{KG}(4,k)$ が必勝ではないことを示すために，deck が等しいのにグラフ同型ではないようなフレームの組の存在を実際に示そう



$\mathcal{F}_z$



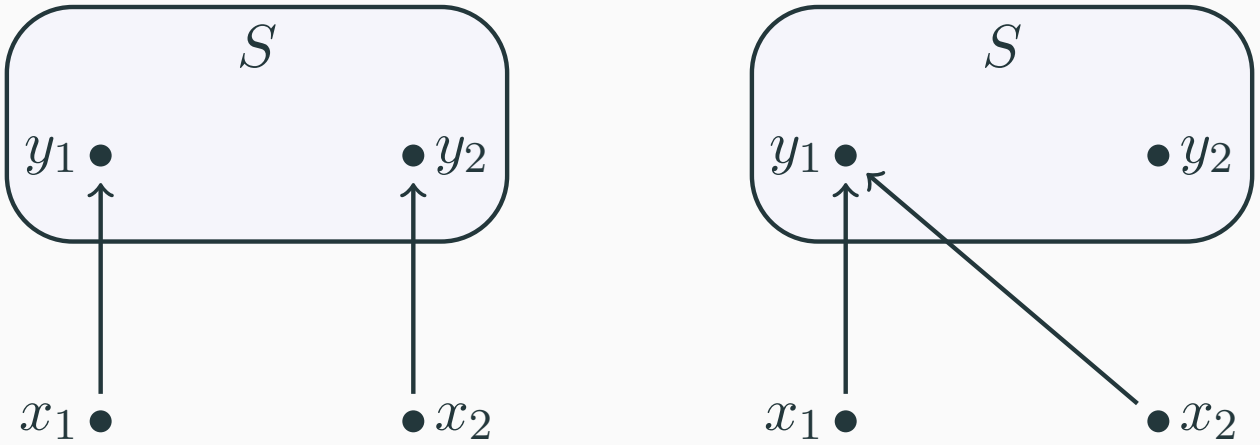
$\mathcal{G}_z$

各可能世界からの生成部分フレームの type が左右で完全一致

$\mathrm{KG}(n, k)$ のより一般的な反例

次のような状態のときに deck が等しくかつ同型でなくなる:

- 対称性が高い部分グラフ S がある
- S の内部に，生成部分フレームが等しい y_1, y_2 がある
- S の外側から y_1, y_2 のいずれかを見る x_1, x_2 がある



➡ まさに $n \geq 4$ のときのみ構成できる！

$\mathrm{KG}(n, k)$ の必勝戦略の有無

- deck が等しくかつ同型でない フレームの組が作れるとき，$\mathrm{KG}(n, k)$ は必勝ではなくなる
  - 論理式ではそのようなフレームたちを区別できないため
- $n \geq 4$ では必ずそのような組を作れるので，必勝ではない
- $n \leq 3$ ではそのような組を作れず，実際に論理式を使ってどんなフレームの組も区別できる
  - 例えば $\mathrm{KG}(2, 4)$ は必勝で，例題で用いた 3 論理式で十分
  - 計算を回した結果 $\mathrm{KG}(3, k)$ も $5 \leq k \leq 7$ あたりで必勝となる

$\mathrm{wKG}(n, k)$ の必勝戦略の有無 (1/2)

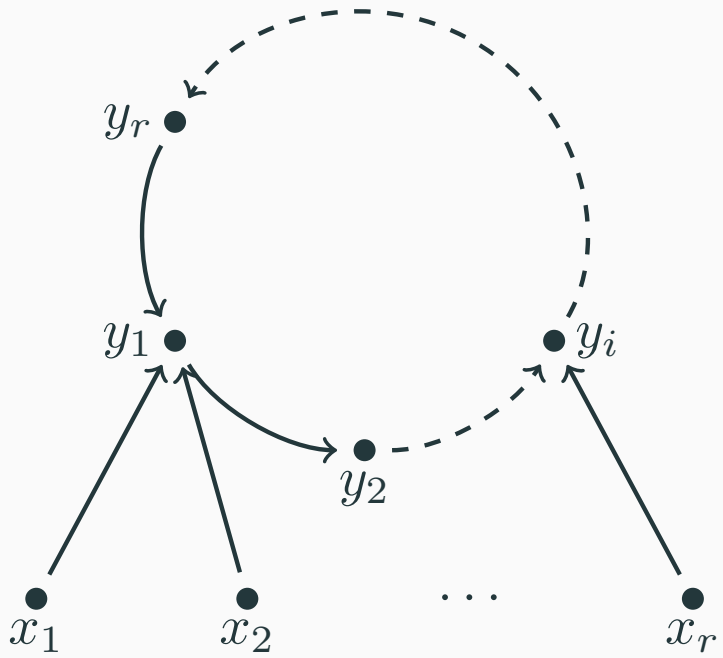
論理式だけでは deck が等しく同型でないフレームたちを区別できず, 候補がある程度残ってしまう

➡ それらを総当たりで全て潰すのに十分な手数を与えれば, $\mathrm{wKG}(n, k)$ を必勝にできる

➡ 「deck が等しく同型でないフレームたち」が n によってどれくらい増加するかを調べたい

$\mathrm{wKG}(n,k)$ の必勝戦略の有無 (2/2)

簡単のため $n = 2r$ とする．次のようなフレームを考える:



外側の r 点が，長さ r のサイクル上の 1 点をそれぞれ選ぶ．
同じ deck を持つ非同型なフレームが $\Theta\left(2^n/n^{\frac{3}{2}}\right)$ 通り作れる

➡ n の exponential 回の総当たりが要求される！

まとめ

Theorem (K. and S.)

(a) $n \leq 3$ のとき，$\mathrm{KG}(n,k)$ はあまりデカくない k で必勝

(b) $n \geq 4$ のとき，$\mathrm{KG}(n,k)$ は k によらず必勝ではない

(c) $\mathrm{wKG}(n,k)$ が必勝となる最小の k は n に対して
少なくとも指数的に増加する

Proof.

(b) は deck が等しく同型でないフレームの組を構成できてしまうことによる．(a) はそのようなフレームの組を作れないことによる．
(c) はそのようなフレームが指数的に増加することによる □

発展的な話題

勝利条件をゆるめると？

Corollary (再掲)

$$\mathrm{Deck}(\mathcal{F}) = \mathrm{Deck}(\mathcal{G}) \iff \forall \varphi\ (\mathrm{VC}(\mathcal{F}, \varphi) = \mathrm{VC}(\mathcal{G}, \varphi))$$

恒真性濃度によって，フレームを up to deck equality で識別できることがわかった

➡ 「deck を当てられれば勝ち」とすればどうか？

そのように修正した $\mathrm{KG}(n, k)$ を $\mathrm{dKG}(n, k)$ とする

Proposition (K. and S.)

$\mathrm{dKG}(n, k)$ が必勝となる最小の k は $\mathrm{O}(n^3)$

LLM によればおそらく $\Theta(n^2)$ であるらしい（チェック中）

同型まで識別できるようにするには？

Fact

- $\mathcal{F}$ and $\mathcal{G}$ are bisimilar $\iff \forall\varphi\ (\mathcal{F} \vDash \varphi \Leftrightarrow \mathcal{G} \vDash \varphi)$
- $\mathrm{Deck}(\mathcal{F}) = \mathrm{Deck}(\mathcal{G}) \iff \forall\varphi\ (\mathrm{VC}(\mathcal{F}, \varphi) = \mathrm{VC}(\mathcal{G}, \varphi))$ (new!)

左辺を 「$\mathcal{F}$ と $\mathcal{G}$ は同型」にするにはどうすればいいだろうか？
（恒真性濃度でいけないか？ と期待していたがダメだった）

Problem

以下を満たす意味論的な条件 C はあるか？

$$\mathcal{F} \text{ and } \mathcal{G} \text{ are isomorphic} \iff \forall\varphi\, C(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \varphi)$$

この問題についてはまだよくわからない

有向グラフ理論との関係

以下の未解決問題がある:

Problem (New digraph reconstruction conjecture)

有向グラフ D, E と全単射 $f : D \to E$ があり，任意の $v \in D$ について以下を満たすとする:

- $D \setminus \{v\}$ と $E \setminus \{f(v)\}$ は同型
- v と $f(v)$ で，incoming/outgoing edges の本数が一致

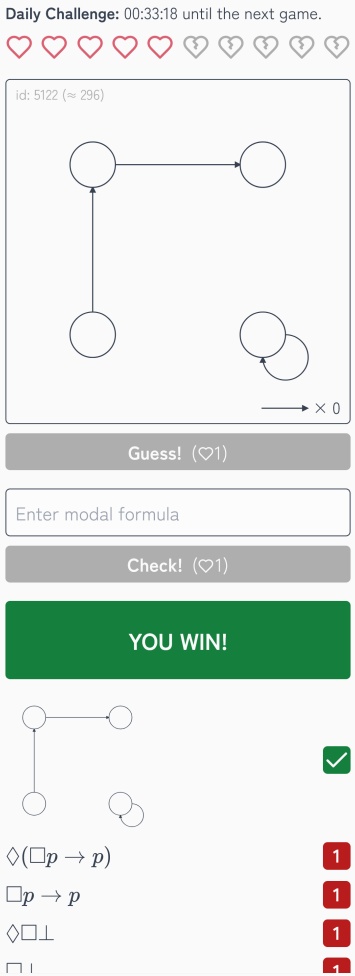
このとき D と E は必ず同型となるか？

これも様相論理的なアプローチができないだろうか？

実は “deck” という用語はこの問題から借りてたりする **

**$\{\!\{D \setminus \{v\} \mid v \in D\}\!\}$ が vertex-removed deck と呼ばれる

遊んでみてね



$\mathrm{wKG}(4, 10)$ を遊べます！

追加で $|R|$ （辺の数）も開示して易しくし，

必勝である[§] ことも示されております

cannorin.net/kripke

[§] https://x.com/Kory__3/status/2031241318220140796

参考文献

[1] Kit Fine.
Logics containing K4. Part II.
Journal of Symbolic Logic, 50(3):619–651, September 1985.

[2] Tomasz Kowalski and Yutaka Miyazaki.
All splitting logics in the lattice NExt(KTB).
In David Makinson, Jacek Malinowski, and Heinrich Wansing, editors, *Towards Mathematical Philosophy*, volume 28 of *Trends in Logic*, pages 53–67. Springer Netherlands, Dordrecht, 2009.

[3] OEIS Foundation Inc.
Number of binary relations on n unlabeled points.
`https://oeis.org/A000595`, 2026.
Entry A000595 in The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences.

[4] Frank Wolter.
Lattices of Modal Logics.
PhD thesis, Freie Universität Berlin, Berlin, August 1993.